

Espaços de Hilbert e Qubits

Richard Costa

UFABC

19 de agosto de 2021



Universidade Federal do ABC

- 1 Produto Interno e Espaços de Hilbert
 - Produto Interno e Espaço de Hilbert
 - Exemplos de Espaços de Hilbert
 - Base Ortonormal e Produto Interno
 - Teorema de Pitágoras
- 2 Teorema de Riesz e Notação de Dirac
 - Bras e Kets
 - Notação de Dirac
 - Alguns operadores na notação de Dirac
 - Base de \mathbb{C}^n a notação de Dirac
- 3 Estados e Observáveis
 - Estados Puros
 - Alguns Postulados Relevantes da Mecânica Quântica
 - Qubits
- 4 Referências

Definição

Um qubit é um sistema quântico descrito por um espaço de Hilbert bidimensional chamado de espaço de qubit \mathbb{C}^2

- Para entender o que é um qubit, vamos ver o que são espaços de Hilbert e quais noções adicionais são necessárias para a formalização de um qubit em termos desses espaços.

O conceito mais fundamental para nós é o de produto interno.

Definição (Produto Interno do Espaço de Hilbert)

O produto interno é a função

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\psi, \varphi) &\mapsto \langle \psi, \varphi \rangle \end{aligned}$$

que satisfaz para todo $\psi, \varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{H}$ e $a, b \in \mathbb{C}$:

- $\langle \psi, (a\varphi_1 + b\varphi_2) \rangle = a\langle \psi, \varphi_1 \rangle + b\langle \psi, \varphi_2 \rangle$
- $\langle \psi, \varphi \rangle = \overline{\langle \varphi, \psi \rangle}$
- $\langle \psi, \psi \rangle \geq 0$, com $\langle \psi, \psi \rangle = 0 \iff \psi = 0$

Algumas implicações da definição:

- Da simetria por conjugação: $\langle \psi, \psi \rangle \in \mathbb{R}$
- Antilinearidade no primeiro argumento:
$$\langle a\psi_1 + b\psi_2, \varphi \rangle = \bar{a}\langle \psi_1, \varphi \rangle + \bar{b}\langle \psi_2, \varphi \rangle$$
- Identidade de polarização: $\langle \psi, \varphi \rangle = \frac{1}{4} (\|\psi + \varphi\|^2 - \|\psi - \varphi\|^2 + i\|\psi - i\varphi\|^2 - i\|\psi + i\varphi\|^2)$
- Obs.: É comum em física usarmos a convenção de anti-linearidade no primeiro argumento e linearidade no segundo.

Definição (Espaço de Hilbert)

Um espaço de Hilbert \mathbb{H} é um espaço vetorial complexo com um produto interno que induz a norma: $\|\cdot\| : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, \psi \mapsto \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}$. Ainda, \mathbb{H} é completo em relação à norma.

- Espaços completos: para toda sequência de Cauchy convergente $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{H}$ temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi \in \mathbb{H}$.
- Sequência de Cauchy convergente: Uma sequência $(\varphi_i)_{i \in I}$ é dita ser de Cauchy convergente se $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $m, n \geq N(\epsilon)$ temos $\|\varphi_m - \varphi_n\| < \epsilon$.
- Em Mecânica Quântica os espaços de Hilbert são separáveis

- Espaço de sequências infinitas quadrado somáveis ℓ^2

Sejam as sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. A adição entre elas é definida coordenada a coordenada

$$\begin{aligned}x_n + y_n &:= (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) + (y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots) \\ &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots)\end{aligned}$$

$$a(x_n) := (ax_1, \dots, ax_n, \dots), a \in \mathbb{R}$$

$$\|x_n\|_2 := \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_2 = (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 + \dots)^{1/2},$$

com $\|x\|_2 < \infty$.

- C^n com:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, z_i \in \mathbb{C}; \langle z, w \rangle := \sum_{i=1}^n \bar{z}_i w_i$$

e base ortonormal: $\{(e_i), i = 1, \dots, n\}$.

- $L^2(\mathbb{R}^3)$

$$L^2(\mathbb{R}^3) := \left\{ \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{x})|^2 d^3\mathbf{x} < \infty \right\}$$

com produto interno definido por ¹

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle := \int_{\mathbb{R}^3} \bar{\psi}_1(\mathbf{x}) \psi_2(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$$

¹Esse espaço com esse produto interno é de dimensão infinita e usado para descrever posição e momento de uma partícula no espaço 3D.

Definição (Base Ortonormal)

Uma base ortonormal é uma base $\{e_i, j \in I\} \in \mathbb{H}$ que satisfaz $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, j \in I$.

- Facilidade no cálculo de coeficientes na expansão de vetores. Seja $\{e_i, i = 1, \dots, N\}$ uma base orthonormal de um espaço vetorial N -dimensional. Então $\forall \psi \in V$:

$$\vec{\psi} = \sum_{i=1}^N \psi_i e_i, \psi_i \in \mathbb{C}$$

$$\vec{\psi} = \sum_{i=1}^N \psi_i \mathbf{e}_i, \psi_i \in \mathbb{C}$$

Para um \mathbf{e}_j particular :

$$\begin{aligned} \implies \langle \mathbf{e}_j, \vec{\psi} \rangle &= \langle \mathbf{e}_j, \sum_{i=1}^N \psi_i \mathbf{e}_i \rangle = \sum_{i=1}^N \psi_i \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle = \\ &= \sum_i^N \psi_i \delta_{ji} = \psi_j \\ \implies \vec{\psi} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i \langle \mathbf{e}_i, \psi \rangle \end{aligned}$$

Nesse caso o produto interno toma uma forma simples:

$$\begin{aligned} \langle \vec{\phi}, \vec{\psi} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^N \phi_i \mathbf{e}_i, \sum_{i=1}^N \psi_i \mathbf{e}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^N \langle \phi_i \mathbf{e}_i, \psi_i \mathbf{e}_i \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^N \underbrace{\bar{\phi}_i}_{\text{antilinear}} \psi_i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = \sum_{i=1}^N \bar{\phi}_i \psi_i \end{aligned}$$

E a norma pode ser escrita em termos do produto interno

$$\|v\|^2 = |\langle v, \mathbf{e}_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, \mathbf{e}_n \rangle|^2$$

Teorema (Teorema de Pitágoras)

Sejam $\psi, \varphi \in \mathbb{H}$ e $\{e_i\}$ uma base ortonormal. Se $\varphi \in \mathbb{H}_{\psi^\perp}$, com $\mathbb{H}_{\psi^\perp} = \{\varphi \in \mathbb{H} \mid \langle \psi, \varphi \rangle = 0\}$, então

$$\|\varphi + \psi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2.$$

Demonstração.

Da definição de produto interno temos:

$$\langle \psi, \varphi \rangle = 0 = \overline{\langle \psi, \varphi \rangle} = \langle \varphi, \psi \rangle,$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\varphi + \psi\|^2 &= \langle \varphi + \psi, \varphi + \psi \rangle = \langle \varphi, \varphi \rangle + \langle \varphi, \psi \rangle + \langle \psi, \varphi \rangle + \langle \psi, \psi \rangle = \\ &= \langle \varphi, \varphi \rangle + \langle \psi, \psi \rangle = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2. \quad \square \end{aligned}$$

- 1 Produto Interno e Espaços de Hilbert
 - Produto Interno e Espaço de Hilbert
 - Exemplos de Espaços de Hilbert
 - Base Ortonormal e Produto Interno
 - Teorema de Pitágoras
- 2 Teorema de Riesz e Notação de Dirac
 - Bras e Kets
 - Notação de Dirac
 - Alguns operadores na notação de Dirac
 - Base de \mathbb{C}^n a notação de Dirac
- 3 Estados e Observáveis
 - Estados Puros
 - Alguns Postulados Relevantes da Mecânica Quântica
 - Qubits
- 4 Referências

Teorema (Teorema da Representação de Riesz)

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e f_u um funcional linear in V . Então existe um único $u \in V$ tal que

$$f_u(v) = \langle u, v \rangle, \forall v \in V.$$

- Existência: seja $\{e_i\}$ uma base ortonormal . Para todo $v \in V$ temos:

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(\sum_{i=1}^N e_i \langle e_i, v \rangle\right) = f(e_1 \langle e_1, v \rangle + \dots + e_n \langle e_n, v \rangle) \\ &= f(e_1) \langle e_1, v \rangle + \dots + f(e_n) \langle e_n, v \rangle \\ &= \langle \overline{f(e_1)} e_1, v \rangle + \dots + \langle \overline{f(e_n)} e_n, v \rangle \\ &= \langle \underbrace{\overline{f(e_1)} e_1 + \dots + \overline{f(e_n)} e_n}_{=u}, v \rangle \\ &= \langle u, v \rangle, \forall v \in V. \end{aligned}$$

Teorema (Teorema da Representação de Riesz)

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e f_u um funcional linear em V . Então existe um único $u \in V$ tal que

$$f_u(v) = \langle u, v \rangle, \forall v \in V.$$

- Unicidade: supomos $f(v) = \langle u, v \rangle = \langle u', v \rangle, \forall v \in V$. Então $\langle u, v \rangle - \langle u', v \rangle = 0, \forall v \in V$. Por linearidade:

$$\langle u, v \rangle - \langle u', v \rangle = \langle u - u', v \rangle = 0$$

Seja $v = u - u'$, então $\langle u - u', u - u' \rangle = 0$. Mas por definição de produto interno $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = \vec{0}$. Então, $u - u' = \mathbf{0} \implies u = u'$. \square

Com o produto interno definimos o funcional **bra**:

Definição

Para cada $\phi \in \mathbb{H}$ existe um funcional $f_\psi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$, associado a um único $\psi \in \mathbb{H}$, tal que $f_\psi(\phi) := \langle \psi, \phi \rangle$.

Alguns pontos:

- Do Teorema de Riesz há uma correspondência 1-1 entre vetores num espaço vetorial e funcionais lineares em seu dual construídos a partir do produto interno. Mais, qualquer funcional linear em V é da forma $\langle u, v \rangle$
- O espaço dual \mathbb{H}^* tem a mesma dimensão que \mathbb{H} . O isomorfismo entre \mathbb{H} e \mathbb{H}^* é antilinear pois a bijeção $\psi \in \mathbb{H} \rightarrow f_\psi \in \mathbb{H}^*$ é anti-linear (já que $\psi \mapsto \sum_{i=1}^N \overline{f(e_i)} e_i$).
- A identificação entre vetores em \mathbb{H} e funcionais em \mathbb{H}^* então motiva a notação de Dirac.

Notação de Dirac:

- $\psi \in \mathbb{H}$ é denotado $|\psi\rangle$ e chamado de **ket**.
- $f_\phi(\cdot) \in \mathbb{H}^*$ é denotado por $\langle\phi|$ e chamado de **bra**.
- Aplicação de um bra sobre um ket:

$$\langle\phi, \psi\rangle \rightarrow \langle\phi|(|\psi\rangle) \equiv \langle\phi|\psi\rangle \text{ (Braket)}$$

Nessa notação a expansão dos vetores na base fica

$$\psi = \sum_i e_i \langle e_i, \psi \rangle \rightarrow \sum_i |e_i\rangle \langle e_i | \psi \rangle$$

Para um operador no espaço de Hilbert, também usamos a notação $A|\psi\rangle \equiv |A\psi\rangle$ ²

A aplicação do operador sobre o ket (vetor) $|\psi\rangle$ é então

$$\begin{aligned} A|\psi\rangle &= |A\psi\rangle \sum_i |e_i\rangle \langle e_i | A\psi \rangle = \\ &= \sum_i |e_i\rangle \left\langle e_i \left| A \left(\sum_j |e_j\rangle \langle e_j | \psi \rangle \right) \right. \right\rangle = \sum_{i,j} |e_i\rangle \langle e_i | A e_j \rangle \langle e_j | \psi \rangle. \end{aligned}$$

²Basicamente estamos salientando que um operador atuando em um ket é um novo ket transformado por A .

Isso motiva a definição:

Definição (Elementos de Matriz de um Operador)

Para um operador A em \mathbb{H} e uma base ortonormal $\{|e_i\rangle\}$, definimos:

$$A_{ij} := \langle e_i | A e_j \rangle.$$

e o identificamos como o elemento (i, j) da matriz $[A]_{\{|e_i\rangle\}}$. A matriz $(A_{ij})_{i,j=1,\dots,\dim \mathbb{H}}$ é a matriz do operador nessa base e usamos o mesmo símbolo A para denotar o operador e sua matriz.

Operador adjunto na notação de Dirac:

- $\langle A^* \psi | \varphi \rangle = \langle \psi | A \varphi \rangle; \forall |\psi\rangle$ com $|\varphi\rangle \in \mathbb{H}$.
- Se é auto-adjunto, isto é, $A^* = A$, então $\langle A \psi | \varphi \rangle = \langle \psi | A \varphi \rangle$.

Proposição

A 'atuação em um bra' de um operador A é dada por $\langle A \phi | = \langle \phi | A^$*

Demonstração.

Lembrando que $\langle \phi | = f_{\phi}(\cdot)$. Então $A\phi(\psi) = (\langle A\phi |) \psi = \langle A\phi | \psi \rangle$
 A atuação desse bra é dada por

$$\begin{aligned} \langle A\phi | : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \psi &\mapsto A(\phi(\psi)) = \langle A\psi | \phi \rangle \end{aligned}$$

Já $\langle \phi | A^*$ é dado por

$$\begin{aligned} \langle \phi | A^* : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \psi &\mapsto \phi(\psi) = \langle \phi | A^* \psi \rangle \end{aligned}$$

Da definição de adjunto e do fato que o adjunto do adjunto é o próprio operador: $\langle A\phi | \psi \rangle = \langle (A^*)^* \phi | \psi \rangle = \langle \phi | A^* \psi \rangle$. □

- $(cA)^* = \bar{c}A^*$

$$\begin{aligned} \langle (cA)^* \phi | \psi \rangle &= \langle \phi | cA\psi \rangle = c \langle \phi | A\psi \rangle = c \langle A^* \phi | \psi \rangle = \langle \bar{c}A^* \phi | \psi \rangle \\ &\implies \langle ((cA)^* - \bar{c}A^*) \phi | \psi \rangle = 0 \end{aligned}$$

Mas $\langle \psi, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathbb{H} \iff \psi = 0$. Então

$$\langle ((cA)^* - \bar{c}A^*) | \psi \rangle = 0 \implies (cA)^* = \bar{c}A^*$$

- Adjunto dos elementos de matriz: $A_{ij}^* = \overline{A_{ji}}$.

Se é autoadjunto então $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$. Da definição de elemento de matriz numa base ortonormal:

$$A_{ij}^* = \langle e_i | A^* e_j \rangle = \langle (A^*)^* e_i | e_j \rangle = \langle A e_i | e_j \rangle = \overline{\langle e_j | A e_i \rangle} = \overline{A_{ji}}$$

Definição

Um operador num espaço de Hilbert satisfazendo $P^2 = P$ é chamado de projeção. Se $P^* = P$, então é chamado de projeção ortogonal. Se $H \subset \mathbb{H}$ e P_H é uma projeção ortogonal e satisfaz $P_H|\psi\rangle = |\psi\rangle \forall |\psi\rangle \in H$, chamamos P_H de projeção no subespaço H .

- Para cada projeção ortogonal podemos escrever $P = \sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, onde $\{\psi_i\}$ é um conjunto de vetores ortonormais.
- Se existir somente um $|\psi\rangle$ denotamos $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ e chamamos de projeção sobre $|\psi\rangle$.

Definição

Seja $\{|e_i\rangle\}$ uma base ortonormal em um espaço de Hilbert \mathbb{H} . O traço é definido como:

$$\text{tr} : \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$A \mapsto \text{tr}(A) := \sum_i \langle e_i | A e_i \rangle = \sum_i A_{ii}.$$

Para um espaço de Hilbert n -dimensional podemos definir um isomorfismo $\mathbb{H} \simeq \mathbb{C}^n$ pela transformação $t : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}^n$ que nos permite identificar uma base ortonormal $\{|e_i\rangle\} \subset \mathbb{H}$ com a base canônica em \mathbb{C}^n de forma que:

$$t|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, t|e_n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A convenção é simplesmente escrever igualdade em vez de carregar t .

Como existe o isomorfismo (antilinear) $\mathbb{H} \simeq \mathbb{H}^*$, então temos uma base dual $\{\langle u_{i'}|\}$ que satisfaz $\langle u_{i'}|e_j\rangle = \delta_{i'j}$. Fazemos, então, a identificação (por $\mathbb{H}^* \simeq \mathbb{H} \simeq \mathbb{C}^n$)

$$\langle e_1| = (1 \ 0 \ \dots \ 0), \dots, \langle e_n| = (0 \ \dots \ 0 \ 1)$$

Como o isomorfismo entre \mathbb{H} e \mathbb{H}^* é antilinear, então se expandirmos um vetor na base canônica, devemos ter:

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |e_i\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \rightarrow \langle\psi| = \sum_i \bar{a}_i \langle e_i| = (\bar{a}_1 \quad \cdots \quad \bar{a}_n)$$

O produto entre um ket e um bra é então:

$$|\varphi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (\bar{b}_1 \quad \cdots \quad \bar{b}_n) = \begin{pmatrix} a_1 \bar{b}_1 & \cdots & a_1 \bar{b}_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n \bar{b}_1 & \cdots & a_n \bar{b}_n \end{pmatrix}$$

Como estamos num espaço de dimensão finita, a matrix $n \times n$ acima tem um operador associado e identificamos produtos do tipo $|x\rangle\langle y|$ como operadores.

Vetores da base:

$$\begin{aligned} |e_1\rangle \equiv |0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & |e_2\rangle \equiv |1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & (\mathbb{H} \simeq \mathbb{C}^2) \\ \langle e_1| \equiv \langle 0| &= (1 \ 0), & \langle e_2| \equiv \langle 1| &= (0 \ 1) & (\mathbb{H}^* \simeq \mathbb{H} \simeq \mathbb{C}^2) \end{aligned}$$

Operadores:

$$|0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, |0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Estados nessa base: $|\varphi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, |\psi\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle$.
- Produto de um ket e um bra:

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle\langle\psi| &= (a|0\rangle + b|1\rangle)(\bar{c}\langle 0| + \bar{d}\langle 1|) = \\ &= a\bar{c}|0\rangle\langle 0| + a\bar{d}|0\rangle\langle 1| + b\bar{c}|1\rangle\langle 0| + b\bar{d}|1\rangle\langle 1| \\ &= \begin{pmatrix} a\bar{c} & a\bar{d} \\ b\bar{c} & b\bar{d} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 1 Produto Interno e Espaços de Hilbert
 - Produto Interno e Espaço de Hilbert
 - Exemplos de Espaços de Hilbert
 - Base Ortonormal e Produto Interno
 - Teorema de Pitágoras
- 2 Teorema de Riesz e Notação de Dirac
 - Bras e Kets
 - Notação de Dirac
 - Alguns operadores na notação de Dirac
 - Base de \mathbb{C}^n a notação de Dirac
- 3 Estados e Observáveis
 - Estados Puros
 - Alguns Postulados Relevantes da Mecânica Quântica
 - Qubits
- 4 Referências

- Uma grandeza física que pode ser medida é chamada de **observável**.
- O conjunto de objetos preparados de forma idênticas (ideal) é chamado de **ensemble estatístico**.
- **Estados** descrevem esse ensemble de objetos cujas medições de grandezas resultam em distribuições de valores.

Definição (Postulado 1: Observáveis)

Uma grandeza física de um sistema quântico é representada por um operador auto-adjunto em um espaço de Hilbert. Se o preparo de um ensemble estatístico é tal que para qualquer observável (representado por um operador auto-adjunto A) o valor médio dessa grandeza é calculada por

$$\langle A \rangle_\psi := \langle \psi | A \psi \rangle,$$

com $|\psi\rangle \in \mathbb{H}$, $\|\psi\| = 1$, então chamamos $\langle A \rangle_\psi$ de **valor esperado** de A no estado puro $|\psi\rangle$.

Definição (Raios Unitários e Estados Puros)

Para qualquer $|\psi\rangle \in \mathbb{H}$ com $\|\psi\| = 1$, o conjunto $S_\psi = \{e^{i\alpha}|\psi\rangle, \alpha \in \mathbb{R}\}$ é chamado de raio em \mathbb{H} com $|\psi\rangle$ sendo seu representante. Estados puros são descritos por representantes.

Definição (Postulado 2: Probabilidades de Estados)

Em um sistema quântico os possíveis valores que podem ser medidos de um observável são dados pelo conjunto de autovalores do operador associado ao observável. A probabilidade $\text{Prob}_\psi(\lambda)$ que para um sistema quântico em um **estado puro** $|\psi\rangle \in \mathbb{H}$ uma medida do observável resulte no autovalor λ de A é dada pela projeção P_λ no autoespaço de λ , $\text{Eig}(A, \lambda)$, e escrita como

$$\text{Prob}_\psi(\lambda) = \|P_\lambda|\psi\rangle\|^2.$$

Proposição

Sejam os estados de um sistema quântico descritos por raios em um espaço de Hilbert \mathbb{H} . Se o sistema foi preparado no estado $|\psi\rangle \in \mathbb{H}$, então a probabilidade de observá-lo no estado $|\varphi\rangle \in \mathbb{H}$ é dada por $\text{Prob} = |\langle\varphi|\psi\rangle|^2$.

Definição (Postulado 3: Colapso da Função de Onda)

Se a medição de um observável num sistema em um estado puro $|\psi\rangle \in \mathbb{H}$ resulta no autovalor λ , então a medição causou a seguinte transição de estados $|\psi\rangle \rightarrow \frac{P_\lambda|\psi\rangle}{\|P_\lambda|\psi\rangle}$, onde P_λ é a projeção no autoespaço de λ .

Qubits são sistemas quânticos de dois níveis (descritos por dois vetores em sua base).

O exemplo clássico é usar elétrons e seus spins, ignorando posição e momento deles (já que nesse caso é preciso usar um espaço de Hilbert de dimensão infinita).

Nesse caso nossa base é denotada por

$$|0\rangle = |\uparrow_{\hat{z}}\rangle, |1\rangle = |\downarrow_{\hat{z}}\rangle$$

que são autovetores (autoestados) de

$$[\sigma_z]_{\{|0\rangle, |1\rangle\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Também poderíamos medir o spin nas direções x e y . Os vetores correspondentes em termos da base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ são dadas por

$$|+\rangle \equiv |\uparrow_{\hat{x}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_{\hat{z}}\rangle + |\downarrow_{\hat{z}}\rangle)$$

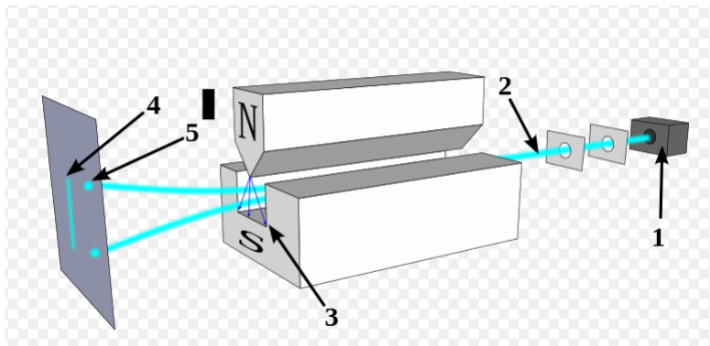
$$|-\rangle \equiv |\downarrow_{\hat{x}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_{\hat{z}}\rangle - |\downarrow_{\hat{z}}\rangle)$$

$$|\uparrow_{\hat{y}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_{\hat{z}}\rangle + i|\downarrow_{\hat{z}}\rangle)$$

$$|\downarrow_{\hat{y}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|\uparrow_{\hat{z}}\rangle + |\downarrow_{\hat{z}}\rangle)$$

Esses vetores são autoestados de σ_x, σ_y respectivamente.

- Experimento de Stern-Gerlach



- Seja S_z o operador de spin na direção z . Se aplicarmos ele a $|0\rangle$ obtemos como autovalor $\lambda = +1/2$. Se aplicarmos a $|1\rangle$ obtemos $\lambda = -1/2$. Para evitar esse fator de meio, definimos $\sigma_i = 2S_i$.
- Preparamos então o elétron de forma que ele esteja, por exemplo, em um autoestado σ_z e dessa forma representar os bits clássicos: $|0\rangle$ para 0 e $|1\rangle$ para 1.
- Isolando o elétron de interações o máximo possível de forma que ele permaneça nesse estado, realizamos algum experimento para medir seu spin, sabendo que serão os autovalores correspondentes a σ_z .

- Mas $|0\rangle, |1\rangle$ não são os únicos estados possíveis de serem medidos. De fato, podemos ter qualquer combinação $a|0\rangle + b|1\rangle$ com $|a|^2 + |b|^2 = 1; a, b, \in \mathbb{C}$. (princípio da superposição de estados).
- Essas combinações lineares **não** acontecem em computação clássica. É por isso que, a princípio, um sistema quântico pode conter muito mais informação do que um bit clássico.

Definição (Qubits (Scherer 2019))

Um qubit é um sistema quântico descrito por um espaço de Hilbert bidimensional \mathbb{H} chamado de **espaço de qubit**. A informação armazenada em um qubit está contida num estado de qubit $|\psi\rangle \in \mathbb{H}$ no qual o sistema se encontra e tal sistema é manipulado e 'lido' de acordo com os postulados da mecânica quântica. Seleccionamos uma base ortonormal no espaço de qubit $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ e um observável representado por um operador auto-adjunto σ_z que tem os autovetores normalizados $|0\rangle$ com autovalor $+1$ e $|1\rangle$ com autovalor -1 .

- Bit clássico: 'receptiente' da informação clássica, cujo 'conteúdo' são os valores $\{0, 1\}$.
- Sistema quântico bidimensional: 'recipiente' da informação quântica descrito por \mathbb{C}^2 , cujo 'valor' é o estado $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$ em que o sistema se encontra.

- Consequência do postulado 3: Uma medida de σ_z resulta em um dos valores observados $+1$ ou -1 e projeta o qubit nos autoestados correspondentes $|0\rangle$ ou $|1\rangle$.
- Resumindo:

Valor observado de $\sigma_z : +1 \rightarrow$ Estado de qubit $|0\rangle \rightarrow$ Valor clássico : 0

Valor observado de $\sigma_z : -1 \rightarrow$ Estado de qubit $|1\rangle \rightarrow$ Valor clássico : 1

- [1] Sheldon Axler. *Linear algebra done right*. Springer, 2014.
- [2] Chris J Isham. *Lectures on Quantum Theory: Mathematical and Structural Foundations*. 1995.
- [3] Kai S Lam. *Non-relativistic Quantum Theory: Dynamics, Symmetry And Geometry*. World Scientific Publishing Company, 2009.
- [4] Wolfgang Scherer. *Mathematics of Quantum Computing*. Springer, 2019.